MATHÉMATIQUES

DEUXIÈME COMPOSITION

Durée : 3 heures

PREMIÈRE PARTIE

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ de toutes les suites réelles u, applications de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, $n \longmapsto u_n$.

La somme $u + u'$ de deux suites u et u' de $\mathcal{E}$ est la suite $n \longmapsto u_n + u'_n$.

Le produit γu d'une suite u par un réel γ est la suite $n \longmapsto \gamma\, u_n$.

La suite nulle 0 est la suite $n \longmapsto 0$.

L'ensemble $\mathcal{E}$, muni de cette addition et de cette multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

1° On désigne par E l'ensemble des suites u de $\mathcal{E}$ qui satisfont à la relation de récurrence :

(1) $\qquad \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$

a. Montrer qu'une telle suite est définie par la donnée de ses deux premiers termes u_0 et u_1 et par la relation (1).

b. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{E}$.

c. Soit v et w les deux suites de E définies par $v_0 = 1$, $v_1 = 0$ et par $w_0 = 0$ et $w_1 = 1$.

Montrer que $\{v, w\}$ est un système libre.

Montrer que si u est un élément quelconque de E,

$$u = u_0 v + u_1 w$$

Que peut-on en conclure pour $\{v, w\}$? Quelle est la dimension de E?

Tournez la page S. V. P.

201

2° *a.* Montrer qu'il existe deux nombres réels t_1 et t_2 tels que les suites géométriques $n \longmapsto t_1^n$ et $n \longmapsto t_2^n$ forment une base de E.

b. Donner l'expression générale du terme u_n d'une suite u quelconque élément de E en désignant par λ et μ les coordonnées de u dans cette base. On posera

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

c. Dans la suite du problème la suite w sera désignée par φ. φ est donc l'élément de E de terme général φ_n défini par $\varphi_0 = 0$ et $\varphi_1 = 1$.

Quelle est l'expression de φ_n?

DEUXIÈME PARTIE

On considère la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n x^n$ où φ_n est le terme général de la suite φ définie à la question précédente, et x une variable réelle.

1° Quel est le rayon de convergence de cette série?

2° Calculer sa somme $f(x)$.

3° Calculer $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\varphi_n x^{n+1}$.

TROISIÈME PARTIE

Soit k un entier naturel au moins égal à 2.

On considère une suite finie ou non d'épreuves indépendantes et identiques. Chaque épreuve a deux issues :

(F) Face avec la probabilité p;

(P) Pile avec la probabilité $1 - p$.

La suite d'épreuves est interrompue à la première apparition de k issues (F)

consécutives. Une séquence des issues, lorsque la suite des épreuves est finie, est donc une suite de (P) et (F), se terminant par k (F) consécutifs et ne comportant dans la partie précédant cette séquence, aucune autre séquence de ce type. Une séquence infinie des issues, lorsque la suite des épreuves est infinie, est une suite infinie de (P) et (F) ne comportant jamais k (F) consécutifs.

Soit Ω l'ensemble de toutes les séquences ω d'issues possibles, finies ou non. Soit Ω_k le sous-ensemble des séquences finies. On définit une variable aléatoire $X_{(k)}$ sur Ω comme suit :

— si $\omega \in \complement_\Omega \Omega_k$ on pose $X_{(k)}(\omega) = 0$;

— si $\omega \in \Omega_k$, $X_{(k)}(\omega)$ est le nombre des épreuves effectuées pour la séquence ω.

Soit un entier naturel $n \geqslant k$; on pose $A_n = \{ \omega \mid X_{(k)}(\omega) = n \}$.

A. Étude du cas $p = \frac{1}{2}$; $k = 2$.

1° Montrer que A_n est un ensemble fini.

2° On pose $S_n = \text{Card } A_n$. Décrire A_n et calculer S_n pour $n = 2, 3, 4, 5$.

3° Considérant les éléments de A_n qui commencent par (P) et ceux qui commencent par (F) (P), montrer que :

$$\forall n,\ n \geqslant 2, \quad S_{n+2} = S_{n+1} + S_n$$

En déduire que $\forall n,\ n \geqslant 1, \quad S_{n+1} = \varphi_n$

φ_n étant défini dans la première partie.

4° Déterminer $Pr(A_n)$.

5° *a.* Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=2}^{\infty} S_n x^n$.

Calculer sa somme $g(x)$.

b. Comparer $g\left(\frac{1}{2}\right)$ et $Pr(\Omega_2)$.

c. Donner l'expression du développement en série entière de la fonction $g'(x)$. Calculer, à l'aide de $g'\left(\frac{1}{2}\right)$, l'espérance mathématique de $X_{(2)}$.

1962

B. Étude du cas général : $0 < p < 1$; $k \geqslant 2$.

1° On pose $P_n = Pr(A_n)$ pour $n \geqslant k$, et $P_n = 0$ pour $n < k$.

Montrer que :

$$\forall n, \quad n \geqslant k, \quad P_{n+1} = (1-p) \sum_{i=0}^{k-1} p^i \cdot P_{n-i}$$

(Indication : effectuer une partition de l'ensemble des séquences finies de longueur n selon la position de la première issue (P)).

Calculer P_k.

2° On pose :

$$\begin{cases} G(z) = \sum_{n=k}^{\infty} P_n x^n \\ H(x) = \sum_{n=k}^{\infty} P_{n+1} x^n \end{cases}$$

Montrer que :

$$H(x) = \frac{1}{x}[G(x) - (px)^k]$$

et que :

$$H(x) = (1-p)\frac{1-(px)^k}{1-px} G(x)$$

En déduire une expression de $G(x)$.

3° Exprimer à l'aide de G' l'espérance mathématique de la variable aléatoire $X_{(k)}$. Montrer que :

$$E(X_{(k)}) = \frac{1}{p^k}\frac{p^k - 1}{p - 1}$$

C. Cas général, autre méthode.

On définit les variables aléatoires $X_1^{(k-1)}$, $X_2^{(k-1)}$, ..., $X_Y^{(k-1)}$, Y, de la façon suivante :

$X_1^{(k-1)}$ est le nombre d'épreuves au bout desquelles la première séquence de $(k-1)$ (F) consécutifs apparaît. Si le résultat de la $(X_1^{(k-1)} + 1)^e$ épreuve est (F), alors $Y = 1$. Sinon, $X_2^{(k-1)}$ est le nombre d'épreuves supplémentaires au bout desquelles la 2e séquence de $(k-1)$ (F) consécutifs apparaît. Si le résultat de la $(X_1^{(k-1)} + X_2^{(k-1)} + 2)^e$ épreuve est (F), alors $Y = 2$.

Sinon, on continue.

Y est finalement le nombre d'apparitions de séquences de $(k-1)$ (F) consécutifs avant l'interruption de la suite d'épreuves.

On peut donc représenter la séquence des issues des épreuves par :

$$x_1^1, x_2^1, \ldots, (F)_1^1, \ldots, (F)_{k-1}^1, (P)^1, x_1^2, \ldots, (F)_1^2, \ldots, (F)_{k-1}^2, (P)^2, \ldots,$$
$$\ldots, (P)^{Y-1}, x_1^Y, \ldots, (F)_1^Y, \ldots, (F)_{k-1}^Y, (F)_k^Y$$

où x_j^i est (P) ou (F)

$x_1^i, x_2^i, \ldots, (F)_1^i, \ldots, (F)_{k-1}^i$

est une séquence de $X_i^{(k-1)}$ épreuves qui se termine par l'apparition de $(k-1)$ (F) et n'ayant pas d'autre sous-séquence de ce type. $(P)^i$ est l'issue suivant les $X_i^{(k-1)}$ épreuves précédentes $(i < Y)$.

On écrit : $X_{(k)} = X_1^{(k-1)} + X_2^{(k-1)} + \ldots + X_Y^{(k-1)} + Y$.

Posons : $Z = X_1^{(k-1)} + X_2^{(k-1)} + \ldots + X_Y^{(k-1)}$.

1° Montrer que l'espérance de Z est :

$$E(Z) = \sum_{n=1}^{\infty} E(Z \mid Y = n) \times Pr(Y = n)$$

2° Montrer que :

$$E(Z \mid Y = n) = n\, E(X_1^{(k-1)})$$

3° Montrer que :

$$E(X_{(k)}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{p} E(X_{(k-1)})$$

Retrouver le résultat du B. 3° de la troisième partie.

N.B. Les questions B et C de la troisième partie peuvent être traitées indépendamment l'une de l'autre.

Tournez la page S. V. P.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail